

Y a-t-il une place pour le doute en
mathématiques ?

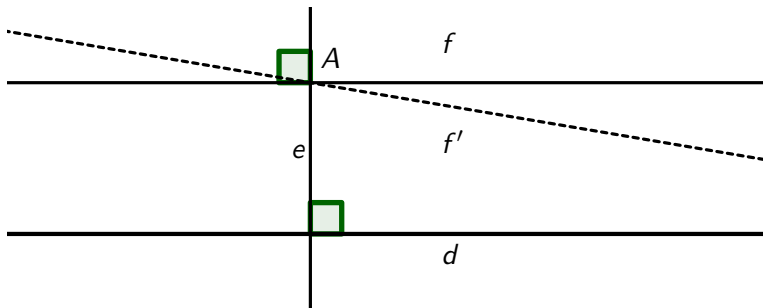
Séminaire ED 139

29 juin 2020

Le domaine de la certitude

- ▶ le point de vue externe, historique : les mathématiques d'Archimède sont aussi vraies aujourd'hui qu'il y a plus de deux millénaires ;
- ▶ le point de vue interne, qui est celui de l'expérience quotidienne du mathématicien.

Le 5ème Postulat

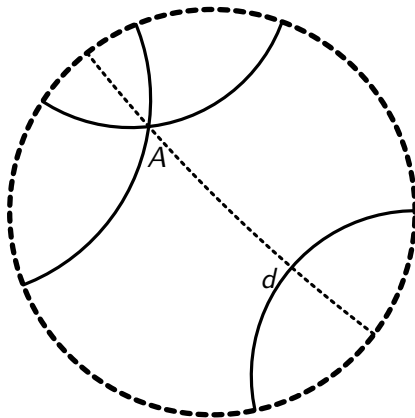


Les « Preuves » du 5ème Postulat

- ▶ Saccheri (1667-1733)
- ▶ Lambert (1728-1777)

La solution est sous leurs yeux mais ils ne la voient pas. Il revenait à Gauss (1777-1855), Bolyai (1802-1860) et Lobatchevsky (1792-1856) de créer (ou découvrir...) la Géométrie Hyperbolique.

Le plan hyperbolique



La logique en question

- ▶ Cantor (1845-1918) : une théorie de l'infini, et ses paradoxes ;
- ▶ Brouwer (1881-1966) : critique du tiers-exclu ;
- ▶ Hilbert (1862-1943) : approche axiomatique.

Exemple

- ▶ $P(x)$: x est un point ;
- ▶ $D(x)$: x est une droite ;
- ▶ $R(x, y)$: y passe par x ;
- ▶ ...

Un axiome d'incidence :

$$\forall x \forall y ((D(x) \wedge D(y) \wedge (x \neq y)) \rightarrow \exists z (D(z) \wedge R(x, z) \wedge R(y, z)))$$

Incomplétude

- ▶ Gödel (1906-1978) : *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (1931)*

Idée de la preuve

- ▶ La liste de *toutes* les propriétés exprimables

$$P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$$

- ▶ Une liste de formules closes $A_n = P_n(n)$
- ▶ La propriété $\overline{\text{Dem}(x)}$ exprimant que A_x n'est pas démontrable est un certain P_k de la liste : que peut-on dire de A_k ?

Perspectives

Quelques théorèmes certifiés

- ▶ La conjecture de Kepler ;
- ▶ La classification des groupes finis ;
- ▶ Le théorème des quatre couleurs.

L'égalité

Voevodsky, à la suite de Martin-Löf remet en question la notion même d'égalité en mathématiques et crée la *Théorie homotopique des types*, en pleine expansion, et dont il est encore trop tôt pour prévoir le destin.

Merci pour votre attention !